1-forme in aperti semplicemente connessi

1-forme chiuse in aperti stellati

Definizione 1 (Aperti stellati)**.** *Diciamo che l'insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ è stellato rispetto al punto $x_0 \in \Omega$, se ha la proprietà seguente. Per ogni $x \in \Omega$ is segmento che collega x_0 a x sta in Ω:*

$$tx_0 + (1-t)x \in \Omega \qquad \textit{per ogni} \qquad t \in [0,1].$$

Esempio 2. *Gli insiemi convessi sono stellati.*

Esempio 3. *I rettangoli sono insiemi stellati.*

Esempio 4. *L'insieme* $\Omega = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y < \sqrt{1+x^2}\Big\}$ *è stellato.*

Teorema 5 (Chiusa $\Rightarrow$ esatta)**.** *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, stellato rispetto al punto $x_0 \in \Omega$. Ogni 1-forma α, chiusa e di classe C^1 su Ω, è esatta.*

Proof. Consideriamo la 1-forma

$$\alpha := a_1(X)\,dx_1 + a_2(X)\,dx_2 + \cdots + a_n(X)\,dx_n,$$

e definiamo il campo vettoriale

$$A(X) = \big(a_1(X), \dots, a_n(X)\big),$$

associato ad α. Siccome la forma è chiusa, abbiamo che $d\alpha = 0$ ovvero

$$\begin{aligned} 0 = d\alpha &= d\Big(a_1(X)\,dx_1 + \cdots + a_n(X)\,dx_n\Big) \\ &= \sum_{i=1}^n da_i \wedge dx_i \\ &= \sum_{i=1}^n \Big(\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j\Big) \wedge dx_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i, \end{aligned}$$

il che implica che per ogni coppia di indici $i \neq j$, abbiamo

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \qquad \text{in} \qquad \Omega.$$

Fissiamo un punto $X_0 \in \Omega$ e per ogni $X \in \Omega$ definiamo la funzione

$$F(X) := \int_\gamma \alpha,$$

dove

$$\gamma : [0,1] \to \Omega, \qquad \gamma(t) = (1-t)X_0 + tX.$$

Per la definizione di integrale di una 1-forma su una curva, abbiamo

$$\begin{aligned} F(X) &= \int_0^1 A(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt \\ &= \int_0^1 A\big((1-t)X_0 + tX\big) \cdot (X - X_0)\,dt. \end{aligned}$$

Derivando sotto il segno dell'intagrale rispetto alla variabile x_j, abbiamo

$$\begin{aligned}
\partial_{x_j} F(X) &= \int_0^1 \partial_{x_j}\Big(\sum_{i=1}^n a_i\big((1-t)X_0+tX\big)\big(x_i-x_{0i}\big)\Big)\,dt \\
&= \int_0^1 \left(a_j\big((1-t)X_0+tX\big)+\sum_{i=1}^n t\,\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\big((1-t)X_0+tX\big)\big(x_i-x_{0i}\big)\right)\,dt \\
&= \int_0^1 \left(a_j\big((1-t)X_0+tX\big)+\sum_{i=1}^n t\,\frac{\partial a_j}{\partial x_i}\big((1-t)X_0+tX\big)\big(x_i-x_{0i}\big)\right)\,dt \\
&= \int_0^1 \left(a_j\big((1-t)X_0+tX\big)+t\,\frac{\partial}{\partial t}\Big[a_j\big((1-t)X_0+tX\big)\Big]\right)\,dt \\
&= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\Big[t\,a_j\big((1-t)X_0+tX\big)\Big]\,dt = a_j(X).
\end{aligned}$$

Quindi $dF = \alpha$ il che conclude la dimostrazione. $\square$

Corollario 6. *In una palla $B_r(X_0) \subset \mathbb{R}^n$, di centro $X_0 \in \mathbb{R}^n$ e raggio $r > 0$, ogni 1-forma chiusa è esatta.*

Corollario 7. *In un rettangolo aperto*

$$\mathcal{R} = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n) \subset \mathbb{R}^n,$$

ogni 1-forma chiusa è esatta.

Una condizione necessaria e sufficiente

Teorema 8. *Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^d$ e sia α una 1-forma di classe C^0 (i coefficienti sono funzioni continue) su Ω. Allora, sono equivalenti:*

(1) α è esatta;

(2) Per ogni curva chiusa C^1 a tratti $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ si ha che $\int_\gamma \alpha = 0$;

(3) Se $\gamma : [a, b] \to \Omega$ e $\sigma : [A, B] \to \Omega$ sono due curve C^1 a tratti tali che:

$$\gamma(a) = \sigma(A) \qquad e \qquad \gamma(b) = \sigma(B),$$

allora $\int_\gamma \alpha = \int_\sigma \alpha$.

Integrazione di 1-forme su curve omotope

Definizione 9 (Curve omotope con gli stessi estremi)**.** *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Siano*

$$\gamma : [a, b] \to \Omega \qquad e \qquad \sigma : [a, b] \to \Omega$$

due curve continue e tali che

$$\gamma(a) = \sigma(a) \qquad e \qquad \gamma(b) = \sigma(b).$$

Diciamo che γ e σ sono omotope se esiste (un intervallo $[c, d]$ e) una funzione continua

$$H : [a, b] \times [c, d] \to \Omega$$

tale che

$$\begin{cases} H(t, c) = \gamma(t) & \textit{per ogni} \quad t \in [a, b] \\ H(t, d) = \sigma(t) & \textit{per ogni} \quad t \in [a, b]. \end{cases}$$

Teorema 10. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e*

$$\gamma : [a,b] \to \Omega \qquad e \qquad \sigma : [a,b] \to \Omega$$

due curve C^1 a tratti con gli stessi estremi:

$$\gamma(a) = \sigma(a) \qquad e \qquad \gamma(b) = \sigma(b).$$

Sia α una 1-forma chiusa su Ω. Se γ e σ sono omotope, allora

$$\int_\gamma \alpha = \int_\sigma \alpha.$$

Dimostrazione : Sia H una funzione continua

$$H : [a,b] \times [c,d] \to \Omega$$

tale che

$$\begin{cases} H(t,c) = \gamma(t) \quad \text{per ogni} \quad t \in [a,b] \\ H(t,d) = \sigma(t) \quad \text{per ogni} \quad t \in [a,b]. \end{cases}.$$

Osserviamo che l'insieme $\mathcal{K} := \{H(t,s) \ : \ t \in [a,b],\ s \in [c,d]\}$ è un compatto contenuto in Ω.

Step 1. Esiste un ricoprimento finito $\Big\{B_{r_k}(x_i)\Big\}_{k=1}^N$ di $\mathcal{K}$ tale che:

- $x_k \in \mathcal{K}$ per ogni k;
- $B_{4r_k}(x_k) \subset \Omega$ per ogni k.

Definiamo

$$r = \min_{1 \le k \le N} r_k.$$

Step 2. Esiste un ricoprimento finito $\Big\{B_r(y_k)\Big\}_{k=1}^M$ di $\mathcal{K}$ tale che:

- $y_k \in \mathcal{K}$ per ogni k;
- $B_{2r}(y_k) \subset \Omega$ per ogni k.

Infatti, per ogni $y \in \mathcal{K}$, y appartiene a una delle palle $B_{r_k}(x_k)$ del ricoprimento del punto precedente. Ma allora $B_{2r_k}(y)$ è un sottoinsieme di $B_{4r_k}(x_k)$ (perché?). Di conseguenza, $B_{2r_k}(y) \subset \Omega$. Siccome $r \le r_k$, abbiamo che

$$B_{2r}(y) \subset \Omega \quad \text{per ogni} \quad y \in \mathcal{K}.$$

La famiglia $\Big\{B_r(y)\Big\}_{y\in\mathcal{K}}$ è un ricoprimento di $\mathcal{K}$. Siccome $\mathcal{K}$ è compatto, questo ricoprimento contiene un sottoricoprimento finito, il che conclude la dimostrazione di *Step 2.*

Step 3. Fissati due naturali m e n, consideriamo le (equi-)partizioni

$$\mathcal{P}_{[a,b]} = \Big\{a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b\Big\}$$

$$\mathcal{P}_{[c,d]} = \Big\{c = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_m = d\Big\}$$

dove

$$t_i = a + i\frac{b-a}{n} \quad \text{per ogni} \quad 0 \le i \le n.$$

$$s_j = c + j\frac{d-c}{m} \quad \text{per ogni} \quad 0 \le j \le m.$$

Per ogni $1 \le i \le n$ e $1 \le j \le m$ definiamo il rettangolo

$$R_{ij} = [t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j].$$

Siccome H è uniformemente continua, scegliendo m e n abbastanza grandi abbiamo che

$$|H(t,s) - H(t',s')| < r \quad \text{per ogni} \quad (t,s) \in R_{ij}, \quad (t',s') \in R_{ij}.$$

In particolare, per ogni coppia di indici (i,j) esiste una palla $B_r(y_k)$ del ricoprimento di Step 2 tale che

$$H(s,t) \in B_{2r}(y_k) \quad \text{per ogni} \quad (s,t) \in R_{ij}.$$

Step 4. Per ogni coppia di indici

$$0 \le i \le n-1 \qquad \text{e} \qquad 0 \le j \le m-1\,,$$

consideriamo le curve γ_{ij} e σ_{ij}

- la curva $\gamma_{ij} : [t_i, t_{i+1}] \to \Omega$ parametrizza il segmento che collega i punti
$$H(t_i, s_j) \quad \text{e} \quad H(t_{i+1}, s_j).$$
- la curva $\sigma_{ij} : [s_j, s_{j+1}] \to \Omega$ parametrizza il segmento che collega i punti
$$H(t_i, s_j) \quad \text{e} \quad H(t_i, s_{j+1}).$$

Ora, fissati i e j, per *Step 3* abbiamo che le curve
$$\gamma_{ij},\ \sigma_{ij}\ \ \gamma_{i,j+1},\ \sigma_{i+1,j}$$
sono tutte contenute in una delle palle $B_{2r}(y_k) \subset \Omega$. Siccome su $B_{2r}(y_k)$ la forma α è anche esatta, abbiamo che
$$\int_{\gamma_{i,j}} \alpha + \int_{\sigma_{i+1,j}} \alpha = \int_{\sigma_{i,j}} \alpha + \int_{\gamma_{i,j+1}} \alpha$$

Step 5. Ora, per ogni $j = 0, \dots, m$ definiamo la curva
$$\gamma_j : [a, b] \to \Omega$$
come il concatenamento
$$\gamma_j = \gamma_{0,j} * \gamma_{1,j} * \gamma_{2,j} * \cdots * \gamma_{n-1,j}.$$
Allora
$$\int_{\gamma_j} \alpha = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\gamma_{ij}} \alpha = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\sigma_{i,j}} \alpha + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\gamma_{i,j+1}} \alpha - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\sigma_{i+1,j}} \alpha = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\gamma_{i,j+1}} \alpha = \int_{\gamma_{j+1}} \alpha.$$
Di conseguenza,
$$\int_{\gamma_0} \alpha = \int_{\gamma_m} \alpha.$$
Ora, per concludere basta osservare che
$$\int_{\gamma_0} \alpha = \int_{\gamma} \alpha \qquad \text{e} \qquad \int_{\gamma_m} \alpha = \int_{\sigma} \alpha.$$
Questo segue dal fatto che gli integrali sono uguali su ogni intervallo $[t_{i-1}, t_i]$ (esercizio !) $\square$

Esercizio 11. *Sia* $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *e siano* γ *e* σ *le curve*
$$\gamma : [0, 2\pi] \to \Omega\ , \qquad \gamma(t) = \big(\cos t,\, \sin t\big)$$
$$\sigma : [0, 2\pi] \to \Omega\ , \qquad \sigma(t) = \big(\cos t,\, 2\sin t\big)$$
Dimostrare che le curve γ *e* σ *sono omotopicamente equivalenti in* Ω. *Calcolare*
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 + \cos^2 t}.$$

1-forme chiuse su insiemi semplicemente connessi

Definizione 12. *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un insieme aperto. Diciamo che* Ω *è* <u>*semplicemente connesso*</u> *se è connesso e per ogni coppia di curve continue*
$$\gamma : [a, b] \to \Omega \qquad e \qquad \sigma : [a, b] \to \Omega$$
con gli stessi estremi,
$$\gamma(a) = \sigma(a) \qquad e \qquad \gamma(b) = \sigma(b),$$
si ha che γ *è omotopa a* σ.

Teorema 13. *Su un aperto semplicemente connesso, ogni* 1*-forma chiusa è esatta.*